ZUR THEORIE

DER

DETERMINANTEN HÖHEREN RANGES.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER,
CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 5. MÄRZ 1885.

In einer früheren Mittheilung („Über Determinanten höheren Ranges", Denkschr. der k. Akad. der Wissensch., mathem.-naturw. Classe, 49. Bd., II. Abth., p. 225 ff.) habe ich eine Classe von Determinanten höheren Ranges behandelt, von denen jede sich unter Adjunction von Einheitswurzeln auf eine Determinante derselben Ordnung von einem um eine Einheit niedrigeren Rang reduciren lässt. In den folgenden Zeilen werden Determinanten höheren Ranges untersucht, welche sich als Producte von Determinanten desselben Ranges, aber niedrigerer Ordnung darstellen lassen.

Die Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p}}$ einer Determinante gerader Ordnung und geraden Ranges:

1) $$\left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

seien so beschaffen, dass:

2) $$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, 2n-i_\mu+1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, 2n-i_\nu+1, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}}$$
$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n;\ \mu \gtrless \nu;\ \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, i_{2p})$$

ist.

Addirt man zu denjenigen Elementen der Determinante 1), welche an der ersten Stelle den Index λ haben, jene Elemente, welche an derselben Stelle den Index $2n-\lambda+1$ besitzen, für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, so bleibt bekanntlich die Determinante ungeändert, und man hat daher die Gleichung:

$$\left| a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right| = \left| A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

wo:

$$A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 > n$$

ist, während für:

$$i_1 \leqq n$$

die Gleichung:

$$A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{2n-i_1+1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

besteht.

Subtrahirt man nun in der Determinante:

$$\left| A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

von denjenigen Elementen, welche an der zweiten Stelle den Index $2n-\lambda+1$ haben, jene Elemente, welche an derselben Stelle den Index λ besitzen, für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, so erhält man die Gleichung:

$$\left| A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right| = \left| B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

wo:

$$B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_2 \leqq n$$

ist, während für:

$$i_2 > n$$

die Gleichung:

$$B_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = -A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + A_{i_1, 2n-i_2+1, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}}$$

besteht.

Nun ist aber für:

$$i_1 \leqq n$$

$$\begin{aligned} -A_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + A_{i_1, 2n-i_2+1, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}} &= -a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} - a_{2n-i_1+1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + \\ &+ a_{2n-i_1+1, 2n-i_2+1, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}} + a_{i_1, 2n-i_2+1, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

und daher hat man die Relation:

$$B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = 0$$

wenn:

$$i_1 \leqq n; \quad i_2 > n$$

ist.

Genügen die Indices i_1 und i_2 den Relationen:

$$i_1 \leqq n; \quad i_2 \leqq n$$

so wird:

$$B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{2n-i_1+1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}},$$

während für:

$$i_1 > n; \quad i_2 \leqq n$$

$$B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

ist, und für:

$$i_1 > n; \quad i_2 > n$$

die Relation:

$$B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = -a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{i_1, 2n-i_2+1, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}}$$

besteht.

Subtrahirt man ferner in der Determinante:

$$\left| B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

von denjenigen Elementen, welche an der dritten Stelle den Index $2n-\lambda+1$ haben, jene Elemente, welche an derselben Stelle den Index λ besitzen, für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, so erhält man die Relation:

$$\left|B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right| = \left|B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)},$$

wo:

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_3 \leqq n$$

ist, während für:

$$i_3 > n$$

die Gleichung:

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = -B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + B^{(1)}_{i_1, i_2, 2n-i_3+1, i_4, i_5, \ldots, i_{2p}}$$

besteht.

Berücksichtigt man die eben abgeleiteten Werthe von $B^{(1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$, so findet man die Gleichungen:

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = 0$$

wenn:

$$i_1 \leqq n$$

und gleichzeitig einer der beiden Indices i_2, i_3 grösser als n ist:

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{2n-i_1+1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 \leqq n; \quad i_2 \leqq n; \quad i_3 \leqq n,$$

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = 2(a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} - a_{i_1, i_2, 2n-i_3+1, i_4, i_5, \ldots, i_{2p}})$$

für:

$$i_1 > n; \quad i_2 > n; \quad i_3 > n$$

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = -a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{i_1, i_2, i_3, 2n-i_4+1, i_5, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 > n; \quad i_2 \leqq n; \quad i_3 > n$$

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = -a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{i_1, i_2, 2n-i_3+1, i_4, i_5, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 > n; \quad i_2 > n; \quad i_3 \leqq n$$

$$B^{(2)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 > n; \quad i_2 \leqq n; \quad i_3 \leqq n.$$

Setzt man das eben angewendete Verfahren fort, so gelangt man schliesslich zu der Gleichung:

$$\left|a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right| = \left|B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)}$$

wo die Elemente $B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$ der Determinante auf der rechten Seite den folgenden Gleichungen genügen:

$$B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = 0$$

wenn:

$$i_1 \leqq n,$$

und gleichzeitig einer der übrigen Indices $i_2, i_3, i_4, \ldots, i_{2p}$ grösser als n ist,

$$B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{2n-i_1+1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$$

für:

$$i_1 \leqq n;\; i_2 \leqq n;\; i_3 \leqq n; \ldots ;\; i_{2p} \leqq n$$

$$B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = 4^{p-1}(-a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} + a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p-1}, 2n-i_{2p}+1})$$

für:

$$i_1 > n;\; i_2 > n;\; i_3 > n; \ldots ;\; i_{2p} > n.$$

Nun besteht, wie ich gezeigt habe („Über Determinanten höheren Ranges". Denkschr. der kais. Akad. der Wissensch., mathem.-naturw. Cl., 43. Bd., II. Abth., p. 17 ff.) folgendes Theorem:

Wenn für r_1 feste Indices alle Elemente einer Determinante $n$ter Ordnung und $m$ten Ranges, in denen irgend einer der anderen Indices einen von $n-r_1$ gegebenen Werthen besitzt, gleich Null sind, so zerfällt die Determinante in das Product zweier Determinanten $m$ten Ranges von den Ordnungen r_1 und $n-r_1$.

Die erste von diesen Determinanten wird aus jenen Elementen der ursprünglichen Determinante gebildet, in denen die festen Indices mit den eben angeführten r_1 Zahlen zusammenfallen, die übrigen Indices aber jene r_1 Werthe aus der Reihe der Zahlen $1, \ldots, n$ besitzen, welche unter den gegebenen $n-r_1$ Zahlen nicht enthalten sind; die Elemente der zweiten Determinante hingegen erhält man, wenn man aus den ursprünglichen Elementen jene auswählt, in denen die veränderlichen Indices die gegebenen $n-r_1$ Werthe besitzen, und die festen Indices mit denjenigen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ zusammenfallen, welche von den erwähnten r_1 Zahlen verschieden sind. Das Product der so erhaltenen Determinanten ist mit dem positiven oder negativen Vorzeichen zu versehen, je nachdem das Product ihrer Hauptdiagonalglieder in der ursprünglichen Determinante positiv oder negativ ist.

Es ist also:

$$3)\quad \left| B^{(2p-1)}_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right| = 4^{n(p-1)} \left| a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}} + a_{2n-j_1+1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}} \right| \cdot \left| -a_{n+j_1, n+j_2, n+j_3, \ldots, n+j_{2p}} + a_{n-j_1+1, n+j_2, n+j_3, \ldots, n+j_{2p}} \right|$$

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n;\; j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Man hat daher den Satz:

Genügen die Elemente $a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$ einer Determinante gerader Ordnung und geraden Ranges:

$$\left| a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right| \; (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n)$$

den Bedingungen:

$$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, 2n-i_\mu+1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, 2n-i_\nu+1, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}}$$

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n;\; \mu \gtrless \nu;\; \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, 2p)$$

so ist:

$$\left| a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right| = 4^{n(p-1)} \left| a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}} + a_{2n-j_1+1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}} \right| \cdot \left| -a_{n+j_1, n+j_2, n+j_3, \ldots, n+j_{2p}} + a_{n-j_1+1, n+j_2, n+j_3, \ldots, n+j_{2p}} \right|$$

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2n;\; j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Nach diesem Satze besteht z. B. für die folgende quadratische Determinante die Relation:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x, & y, & u, & v, & r, & s, & t, & w \\ y, & x, & v, & u, & s, & r, & w, & t \\ u, & v, & x, & y, & t, & w, & r, & s \\ v, & u, & y, & x, & w, & t, & s, & r \\ r, & s, & t, & w, & x, & y, & u, & v \\ s, & r, & w, & t, & y, & x, & v, & u \\ t, & w, & r, & s, & u, & v, & x, & y \\ w, & t, & s, & r, & v, & u, & y, & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w, & y+t, & u+s, & v+r \\ y+t, & x+w, & v+r, & u+s \\ u+s, & v+r, & x+w, & y+t \\ v+r, & u+s, & y+t, & x+w \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w, & y-t, & u-s, & v-r \\ y-t, & x-w, & v-r, & u-s \\ u-s, & v-r, & x-w, & y-t \\ v-r, & u-s, & y-t, & x-w \end{vmatrix}$$

Da die beiden Determinanten auf der rechten Seite dieser Gleichung abermals den Bedingungen des aufgestellten Theorems genügen, so kann jede von ihnen wieder als ein Product von zwei Determinanten zweiter Ordnung dargestellt werden, und daher ist ferner:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+w+v+r, & y+t+u+s \\ y+u+t+s, & x+w+v+r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x+w-v-r, & y+t-u-s \\ y+t-u-s, & x+w-v-r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w+v-r, & y-t+u-s \\ y-t+u-s, & x-w+v-r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w-v+r, & y-t-u+s \\ y-t-u+s, & x-w-v+r \end{vmatrix},$$

welche Relation sofort in die folgende von Herrn A. Puchta angegebene Gleichung („Ein Determinantensatz und seine Umkehrung". Von A. Puchta. Denkschr. der k. Akad. der Wissensch., mathem.-naturw. Classe, 38 Bd., II. Abth., p. 225 ff.):

$$\Delta=(x+y+u+v+w+r+s+t)(x+v+w+r-y-t-u-s)(x+w+y+t-u-v-r-s).$$
$$.(x+w+u+s-y-r-v-t)(x-w+v-r+y-t+u-s)(x-w+v-r-y+t-u+s).$$
$$.(x-w-v+r+y-t-u+s)(x-w-v+r-y+t+u-s)$$

übergeht.

Ist in der Determinante 1):

$$n=2n_1,$$

und genügen die Elemente $a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$ nicht nur den Relationen 2), sondern auch den Gleichungen:

$$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}=a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, 2n_1-i_\mu+1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, 2n_1-i_\nu+1, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}}$$

$$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, 2n_1+i_\mu+1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{2p}}=a_{i_2, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, 4n_1-i_\mu+1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, 2n_1-i_\nu+1, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}}$$

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, i_{\mu+1}, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_{2p}=1, 2, 3, \ldots, 4n_1;\ i_\mu, i_\nu=1, 2, 3, \ldots, 2n_1;\ \mu \gtrless \nu;\ \mu, \nu=1, 2, 3, \ldots, 2p),$$

so erfüllen ersichtlich die Elemente der beiden. auf der rechten Seite der Gleichung 3) stehenden Determinanten die Bedingungen des abgeleiteten Theorems und man hat daher in diesem Falle die Gleichung:

$$\left|a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right|=\left|a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}}+a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, 4n_1-j_{2p-1}+1, j_{2p}}+a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p-1}, 2n_1-j_{2p-1}, j_{2p}}\right.$$
$$\left.+a_{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p-1}, 2n+j_{2p-2}, j_{2p}}\right| .$$

$$\cdot\left|-a_{n_1+j_1, n_1+j_2, n_1+j_3, \ldots, n_1+j_{2p}}-a_{n_1+j_1, n_1+j_2, n_1+j_3, \ldots, n+j_{2p-2}, 3n_1-j_{2p-2}+1, n_1+j_{2p}}+\right.$$
$$\left.+a_{n_1+j_1, n_1+j_2, n_1+j_3, \ldots, n_1+j_{2p-1}, n_1-j_{2p}+1}+a_{n_1+j_1, n_1+j_2, n_1+j_3, \ldots, n_1+j_{2p-2}, 3n_1-j_{2p-1}+1, n_1-j_{2p}+1}\right| .$$

$$\cdot\left|-a_{2n_1+j_1, 2n_1+j_2, 2n_1+j_3, \ldots, 2n_1+j_{2p}}+a_{2n_1+j_1, 2n_1+j_2, 2n_1+j_3, \ldots, 2n_1+j_{2p-1}, 2n_1-j_{2p}+1}-\right.$$
$$\left.-a_{2n_1+j_1, 2n_1+j_2, 2n_1+j_3, \ldots, 2n_1+j_{2p-2}, j_{2p-1}+1, j_{2p}}+a_{2n_1+j_1, 2n_1+j_2, 2n_1+j_3, \ldots, j_{2p-1}+1, 2n_1-j_{2p}+1}\right| .$$

$$\cdot\left|a_{3n_1+j_1, 3n_1+j_2, 3n_1+j_3, \ldots, 2n_1+j_{2p}}-a_{3n_1+j_1, 3n_1+j_2, 3n_1+j_3, \ldots, 3n_1+j_{2p-1}, 3n_1-j_{2p}+1}-\right.$$
$$\left.-a_{3n_1+j_1, 3n_1+j_2, 3n_1+j_3, \ldots, 3n_1+j_{2p-1}, 3n_1-j_{2p}+1}+a_{3n_1+j_1, 3n_1+j_2, 3n_1+j_3, \ldots, 3n_1+j_{2p-1}, j_{2p}}\right|$$

$$(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}=1, 2, 3, \ldots, 4n_1;\ j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{2p}=1, 2, 3, \ldots, n_1).$$

Man sieht sofort, dass sich auf dem eben eingeschlagenen Wege das folgende allgemeine Theorem ableiten lässt:

Genügen alle Partialsysteme, welche aus den Elementen $a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}$ einer Determinante geraden Rang von der Ordnung $2^\lambda n$:

$$\left|a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}}\right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}=2^\lambda n)}$$

dadurch abgeleitet werden, dass die Indices $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}$ die Werthe $1, 2, 3, \ldots, 2^\lambda n$ erhalten, während jeder der beiden Indices i_μ, i_ν irgend eines der $2^{\lambda-\sigma}$ Werthsysteme:

$$1, 2, 3, \ldots, 2^\sigma n;\ 2^\sigma n+1, 2^\sigma n+2, 2^\sigma n+3, \ldots, 2^{\sigma+1} n;\ 2^{\sigma+1} n+1, 2^{\sigma+1} n+2, 2^{\sigma+1} n+3, \ldots, 3.2^\sigma n; \ldots;$$
$$(2^{\lambda-\sigma}-1) 2^\sigma n+1, (2^{\lambda-\sigma}-1) 2^\sigma n+2, (2^{\lambda-\sigma}-1) 2^\sigma n+3, \ldots, 2^\lambda n$$

durchläuft, der Bedingung:

$$a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} = a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{\mu-1}, \mu_1 - i_\mu + 1, i_{\mu+1}, i_{\mu+2}, \ldots, i_{\nu-1}, \nu_1 - i_\nu + 1, i_{\nu+1}, i_{\nu+2}, \ldots, i_{2p}},$$

wo μ_1 und ν_1 die grössten Werthe von i_μ und i_ν in dem von diesen Grössen durchlaufenen Intervalle sind, für $\sigma = \lambda, \lambda-1, \lambda-2, \ldots, \lambda-\rho$ und $\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, so lässt sich die Determinante als ein Product von $2^{\rho+1}$ Determinanten desselben Ranges von der Ordnung $2^{\lambda-\rho-1}n$ darstellen, deren Elemente lineare Functionen von je $2^{\rho+1}$ in leicht bestimmbarer Weise mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Elementen der ursprünglichen Determinante sind.

Ist speciell:

$$\rho = \lambda - 1$$
$$n = 1,$$

so kann die Determinante geraden Ranges von der Ordnung 2^λ:

$$\left| a_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p}} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2^\lambda)}$$

als Product von 2^λ Factoren dargestellt werden, von denen jeder die Summe aller verschiedenen, in geeigneter Weise mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Elementen der Determinante ist, und dem Zahlenfactor $4^{(p-1)4^{\lambda-1}}$. Man sieht sofort, dass einer der Factoren die Summe aller verschiedenen Elemente ist, während in allen übrigen Factoren die Hälfte der Elemente das positive, und die andere Hälfte das negative Vorzeichen besitzt. Für quadratische Determinanten hat diesen speciellen Fall Herr A. Puchta a. a. O. abgeleitet.

Ich will bei dieser Gelegenheit einen neuen einfachen Beweis eines von Herrn K. Weierstrass herrührenden Satzes über höhere complexe Zahlen mittheilen.

Über die n Haupteinheiten $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, aus denen die erwähnten complexen Zahlen gebildet sind, werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Einheiten sind von einander linear unabhängig, so dass also eine Gleichung von der Form:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$$

nur bestehen hann, wenn alle Zahlen $\alpha_\lambda\ (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n)$ den Werth 0 haben.

2. Die Multiplication der Einheiten ist commutativ, associativ und distributiv.

3. Die für die Einheiten bestehenden Multiplicationsgesetze sind so beschaffen, dass die Division im Allgemeinen ausführbar ist.

Das System soll selbstverständlich ein begrenztes complexes Zahlensystem in der Weise sein, dass die Producte der Einheiten sich wieder linear durch die Einheiten selbst darstellen lassen.

Für die Zahlen dieses Gebietes sind bekanntlich die Addition und Multiplication commutativ, associativ und distributiv, es existirt ferner in diesem Zahlensysteme ein Modul der Multiplication ε_1, d. h. eine Zahl, welche jede andere ungeändert lässt, wenn sie mit ihr multiplicirt wird. In einem solchen Zahlensysteme existirt nun aber, wie Herr K. Weierstrass gezeigt hat, die Quadratwurzel aus $-\varepsilon_1$ nicht, wenn die Anzahl n der Haupteinheiten ungerade ist.

Bekanntlich lässt sich jede aus n Haupteinheiten $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ den entgegengesetzten Einheiten und den genauen Theilen derselben gebildete complexe Zahl auf die Form:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n$$

bringen, wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ aus einer unbenannten Haupteinheit gebildete Zahlengrössen sind, und $\alpha_\lambda e_\lambda$ die Grösse bezeichnet, die man dadurch erhält, dass man e_λ an Stelle der zur Bildung von α_λ verwendeten Einheit setzt.

Hat man nun n Zahlen des Gebietes:

$$\eta_1 = \alpha_{1,1}\, e_1 + \alpha_{1,2}\, e_2 + \alpha_{1,3}\, e_3 + \cdots + \alpha_{1,n}\, e_n$$
$$\eta_2 = \alpha_{2,1}\, e_1 + \alpha_{2,2}\, e_2 + \alpha_{2,3}\, e_3 + \cdots + \alpha_{2,n}\, e_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_n = \alpha_{n,1}\, e_1 + \alpha_{n,2}\, e_2 + \alpha_{n,3}\, e_3 + \cdots + \alpha_{n,n}\, e_n$$

welche so beschaffen sind, dass die Determinante:

$$\left| \alpha_{\iota,\varkappa} \right|_{(\iota,\varkappa = 1,2,3,\ldots,n)}$$

von Null verschieden ist, so kann man die ursprünglichen Einheiten und daher jede Zahl des Gebietes, also auch die Producte $\eta_\lambda \eta_\mu$ linear durch die Zahlen η_σ ausdrücken.

Existirt nun in dem betrachteten Zahlensysteme die Quadratwurzel aus $-\varepsilon_1$, so kann man stets $n-2$ Zahlen $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ von der Beschaffenheit angeben, dass die eben erwähnte Determinante von Null verschieden ist, wenn:

$$\eta_1 = \varepsilon_1,\ \eta_2 = \sqrt{-\varepsilon_1},$$

gesetzt wird, weil zwischen ε_1 und $\sqrt{-\varepsilon_1}$ keine lineare Relation besteht.

Man hat daher für die eben genannten n Zahlen des Gebietes die Gleichungen:

$$\eta_\lambda \eta_\mu = (\lambda,\mu)_1 \eta_1 + (\lambda,\mu)_2 \eta_2 + (\lambda,\mu)_3 \eta_3 + \cdots + (\lambda,\mu)_n \eta_n,$$

wo die aus einer unbenannten Haupteinheit gebildeten Grössen $(\lambda,\mu)_\nu$ den Relationen,

4) $$(\lambda,\mu)_\nu = (\mu,\lambda)_\nu$$

5) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\lambda,\mu)_\nu (\nu,\rho)_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (\lambda,\rho)_\tau (\tau,\mu)_\sigma \qquad (\lambda,\mu,\rho,\sigma = 1,2,\ldots,n)$$

genügen müssen, damit die Multiplication commutativ und associativ ist.

Setzt man in dem Gleichungssysteme 5):

$$\lambda = \mu = 2,$$

und berücksichtigt, dass:

$$(1,\mu)_\nu = 0 \qquad (\mu \lessgtr \nu)$$
$$(1,\mu)_\mu = \varepsilon$$
$$(2,2)_\rho = 0 \qquad (\rho > 1)$$
$$(2,2)_1 = -\varepsilon$$

wo ε der Modul der Multiplication in den aus einer Haupteinheit gebildeten Zahlensysteme ist, welchem die Zahlen $(\lambda,\mu)_\nu$ angehören, so erhält man:

$$-(1,\rho)_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (2,\rho)_\tau (\tau,2)_\sigma \qquad (\rho,\sigma = 1,2,\ldots,n)$$

oder wegen 4):

$$-(1,\rho)_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (2,\rho)_\tau (2,\tau)_\sigma \qquad (\rho,\sigma = 1,2,3,\ldots,n)$$

Man hat daher die Relation:

$$\left| \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (2,\rho)_\tau (2,\tau)_\sigma \right| = \left| -(1,\rho)_\sigma \right|_{(\rho,\sigma = 1,2,3,\ldots,n)}$$
$$= (-\varepsilon)^n$$

oder nach dem Multiplicationstheoreme der Determinanten:

$$\left| (2, \rho)_\tau \right|^2_{(\rho, \tau = 1, 2, 3, \ldots, n)} = (-\varepsilon)^n.$$

Ist nun n ungerade, so erhält man aus dieser Gleichung die Formel;

$$\left| (2, \rho)_\tau \right|_{(\rho, \tau = 1, 2, 3, \ldots, n)} = \sqrt{-\varepsilon}.$$

Dies ist aber unmöglich, da die Determinante von Zahlen, die aus einer Haupteinheit gebildet sind, der in dem betreffenden Zahlensysteme nicht existirenden Quadratwurzel aus dem negativen Modul der Multiplication niemals gleich sein kann.

Es kann daher in einem aus n Haupteinheiten gebildeten Zahlensysteme, wenn die Einheiten der angegebenen Bedingungsgleichungen genügen und die Anzahl derselben ungerade ist, $\sqrt{-\varepsilon_1}$ nicht existiren.

Den soeben bewiesenen Satz hat Herr K. Weierstrass, wie ich aus meinen Aufzeichnungen ersehe, schon am 17. Juni 1874 in der von ihm geleiteten Abtheilung des mathematischen Seminars der Berliner Universität in anderer Weise abgeleitet, als er seine Untersuchungen über complexe Zahlen, welche aus n Haupteinheiten gebildet sind, mittheilte, die er unlängst in etwas erweiterter Form veröffentlicht hat. („Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen". Von K. Weierstrass. Nachrichten der königl. Gesellsch. der Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen aus dem Jahre 1884, p. 395 ff.)